

--	--	--	--	--	--	--

MATEMÁTICA DISCRETA I

Apellidos.....Nombre.....nº mat.....

Ejercicio 1 (15 puntos)

Se lanza un dado 21 veces. Teniendo en cuenta el orden de lanzamiento,

- ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?
- ¿en cuántos resultados distintos aparece el 1 una vez, el 2 dos veces, el 3 tres veces, el 4 cuatro veces, el 5 cinco veces y el 6 seis veces?

Solución:

- 6^{21}
- $\frac{21!}{2!3!4!5!6!}$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Una caja con 20 bolas contiene 5 bolas de cada uno de los colores rojo, azul, verde y amarillo. Se extraen bolas de la caja sin reemplazamiento.

- ¿Cuántas extracciones son necesarias para asegurar al menos una bola de cada color?
- ¿Cuántas extracciones son necesarias para asegurar al menos tres bolas del mismo color?

Solución:

- $16=3*5+1$
- $9=2*4+1$

Ejercicio 3 (20 puntos)

Jaime quiere celebrar su cumpleaños, y como su casa es pequeña, tiene que elegir 7 de entre sus 20 amigos.

- ¿De cuántas formas distintas puede hacer la elección?
- Se acuerda que Juan y Ángela no pueden estar juntos. Si no quiere elegir a la vez a los dos, ¿de cuántas formas distintas puede hacer la elección?
- Como Pedro y Manuel son muy amigos, o invita a los dos, o no invita a ninguno. ¿De cuántas formas distintas puede hacer la elección?

Solución:

- $C_{20,7}$
- $C_{20,7} - C_{18,5} = C_{18,7} + 2C_{18,6}$

Observaciones:

- TIEMPO: 2 horas
- Justificar todas las respuestas.
- Sólo se valorarán aquellas respuestas que utilicen los métodos desarrollados en esta asignatura.
- No está permitido el uso de calculadoras, ordenadores personales, ni teléfonos móviles.

c) $C_{18,5} + C_{18,7}$

Ejercicio 4 (20 puntos)

- a) Determina el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$$

- b) Determina el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ 2 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2, 3 \leq x_3 \leq 6, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

Solución:

a) $\binom{3+16}{3}$

b) $\binom{3+11}{3} - \left[2 \binom{3+7}{3} - \binom{3+3}{3} \right]$

Ejercicio 5 (15 puntos)

Sean n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes. Sea a_n el número de regiones acotadas en que las n rectas dividen al plano. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

Solución:

Relación de recurrencia: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n - 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$

Fórmula explícita: $a_n = 1 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2$

Ejercicio 6 (15 puntos)

- a) Obtén la solución general de la siguiente relación de recurrencia lineal homogénea:

$$a_n = -6a_{n-1} - 12a_{n-2} - 8a_{n-3}$$

- b) Resuelve la siguiente relación de recurrencia, con sus condiciones iniciales:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2 \cdot 3^n \\ a_0 = 0, a_1 = 6 \end{cases}$$

Solución:

a) Ecuación característica: $x^3 = -6x^2 - 12x - 8$

Raíces: -2 triple.

Solución general: $a_n = A(-2)^n + Bn(-2)^n + Cn^2(-2)^n$

b) $a_n = (n + n^2)3^n$